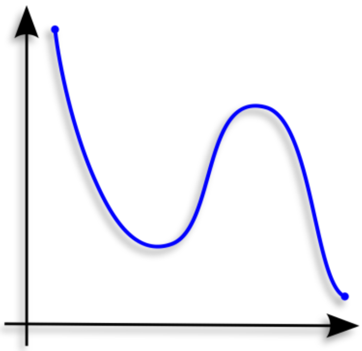
Υλικό για το

ΜΑΣ 025-Μαθηματικά για μηχανικούς

'Συνέχεια συνάρτησης'



0.1 Ασκήσεις επανάληψης στο όριο συνάρτησης

▶▶ Άσκηση
Υπολογίστε τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν)

(i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x+6}$

(ii) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2}{4-x}$

(iii) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-2|}{x-2}$

(v) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x-2}$

(vi) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$

(vii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{x^2}$

(viii) $\lim\limits_{x\to 2-}\sqrt{2-x}$

(ix) $\lim\limits_{x\to 2+}\sqrt{2-x}$

(x) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^3-x}$

(xi) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{2x-3}$

(xii) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{x^2-4}$

(xiii) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-2}{x-x^2}$

(xiv) $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{1}{|x-1|}$

(xv) $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{1}{|x-1|}$.

Λύση

(i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x+6}=\dfrac{3+3}{3+6}=\dfrac{2}{3}$

(ii) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2}{4-x}=\dfrac{(-4)^2}{4-(-4)}=2$

(iii) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|-2|}{-2}=-1$

(v) $\frac{|x-2|}{x-2}=\begin{cases}1, & x>2\\ -1, & x<2\end{cases}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}$

(vi) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x-2}$, το οποίο όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα, δεν υπάρχει.

(vii)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2})(\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2})}{x^2(\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2})}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(2+x^2)-(2-x^2)}{x^2(\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2})}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2(\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2})}\\
&= \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

(viii) $\lim\limits_{x\to 2-}\sqrt{2-x}=\sqrt{2-2}=0.$

(ix) $\nexists \lim\limits_{x\to 2+} \sqrt{2-x}$, αφού $2-x<0$, για $x>2$.

(x) $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^3-x}$, αφού $x^3-x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1) < 0$, για $x \in (0,1)$.

(xi) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x-3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2-\frac{3}{x}} = \dfrac{1}{2}$.

(xii) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x(x-\frac{4}{x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-\frac{4}{x}} = +\infty$.

(xiii) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2}{x-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

(xiv) $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{1}{|x-1|} = +\infty$.

(xv) $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{1}{|x-1|} = +\infty$.

▶▶ Άσκηση

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν)

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$, **(ii)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$, **(iii)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

Λύση

(i)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} &= \lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} &= \lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x(1-\sqrt{1-x^2})} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x(1+\sqrt{1-x^2})} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = 0.\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} &= \lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1-\sqrt{1-x^2})} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = 1.\end{aligned}$$

►► Άσκηση

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν)

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-8}{x-2}$,

(iv) $\lim\limits_{x\to y}\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$,

(v) $\lim\limits_{y\to x}\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$

(vi) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$ $(a>0)$

Λύση

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=1-1=0.$

(ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)=2^2+2\cdot 2+4=12.$

(iii) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\dfrac{3^3-8}{3-2}=19.$

(iv) Θυμόμαστε οτι

$$x^n-y^n=(x-y)\sum_{i=0}^{n-1}x^iy^{n-1-i}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to y}\frac{x^n-y^n}{x-y} &= \lim_{x\to y}[x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-1}+y^{n-1}]\\ &= y^{n-1}+\ldots+y^{n-1}=ny^{n-1}.\end{aligned}$$

Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού

$$\lim_{x\to y}\frac{x^n-y^n}{x-y}=\frac{d}{dx}\Big|_{x=y}x^n.$$

(v) $\lim\limits_{y\to x}\dfrac{x^n-y^n}{x-y}=\lim\limits_{y\to x}\dfrac{y^n-x^n}{y-x}=nx^{n-1}$, από το προηγούμενο.

(vi)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{d\sqrt{x}}{dx}\Big|_{x=a}.$$

►► **Άσκηση**
Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το πιο κάτω όριο:

$$\lim_{x\to 0^+}(e^{-1/x}\sin(1/x)-(x+2)^3).$$

Απάντηση
Για $x>0$,

$$0\leq\left|\frac{e^{-1/x}\sin\frac{1}{x}}{x}\right|\leq\frac{e^{-1/x}}{x}.$$

Αλλά,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{e^{1/x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0,$$

π.χ. από τον κανόνα του de L'Hospital.
Άρα, από το κριτήριο της παρεμβολής,

$$\lim_{x\to 0^+}e^{-1/x}\sin(1/x)=0.$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to 0^+}(x+2)^3=2^3=8.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to 0^+}(e^{-1/x}\sin(1/x)-(x+2)^3)=\lim_{x\to 0^+}e^{-1/x}\sin(1/x)-\lim_{x\to 0^+}(x+2)^3=-8.$$

0.2 Συνέχεια

Ορισμός 0.2.1. *(Συνεχής συνάρτηση)*

Λέμε οτι μια συνάρτηση f είναι **συνεχής στο** x_0 αν

(i) Αν το $f(x_0)$ ορίζεται, δηλ. αν το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

(ii) Αν το $\lim_{x\to x_0}f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

(iii) Αν το $\lim_{x\to x_0}f(x)$ υπάρχει (και είναι πραγματικός αριθμός), τότε αυτό είναι ίσο με $f(x_0)$.

Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε λέμε ότι είναι **ασυνεχής στο** x_0. Αν η f είναι συνεχής για κάθε σημείο ενός ανοικτού διαστήματος (a,b), τότε λέμε οτι είναι **συνεχής στο** (a,b). Αν η f είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε λέμε οτι είναι **συνεχής παντού** ή απλά **συνεχής**.

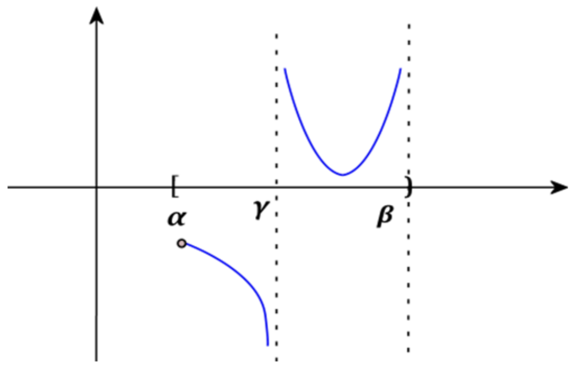
Ουσιαστικά, η σχέση που μας δίνει τη συνέχεια είναι η

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \tag{1}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να αναδιαυπωθεί και ως εξής:

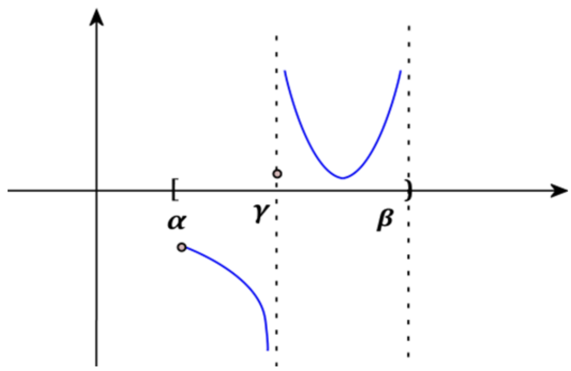
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(\lim_{x\to x_0}x) \tag{2}$$

η οποία εκφράζει το ότι μπορούμε να εναλλάξουμε το όριο με την f.



Σχήμα 1

Παρατήρηση 0.2.1. *Σύμφωνα με τον ορισμό της συνέχειας που δώσαμε, δεν έχει νόημα να μιλάμε για συνέχεια συνάρτησης στο διάστημα $[\alpha, \beta)$, σε περιπτώσεις όπως στο σχήμα 1 αφού το σημείο $x = \gamma$ (το οποίο ανήκει στο εσωτερικό του διαστήματος $[\alpha, \beta)$, δηλ. στο (α, β)) δεν ανήκει στο π.ο. της συνάρτησης. Η συνάρτηση όμως είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \gamma)$ και στο (γ, β). Αν όμως το σημείο $x = \gamma$ ανήκει στο π.ο. της συνάρτησης, τότε μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια στο διάστημα $[\alpha, \beta)$ (βλ. σχήμα 2).*



Σχήμα 2

Παραδείγματα 0.2.1.

(i) Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}.$$
Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, αφού αν $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

(ii) Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}.$$
Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Θα ελέγξουμε τη συνέχεια στο σημείο $x = 2$. Έχουμε
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3.$$

Έτσι, υπάρχει το $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2) = 4$ και άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x = 2$.

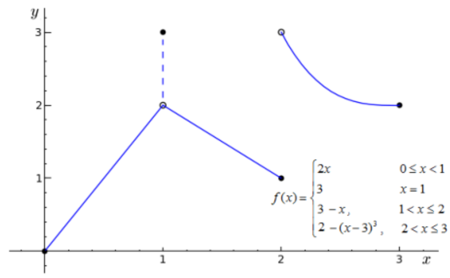
(iii) Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ 3 - x, & 1 < x \leq 2 \\ 2 - (x-3)^3, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

και άρα το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με 2, αλλά $f(2) = 3$ και άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x = 1$. Τώρα, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 \neq 3 = \lim_{x\to 2^+} f(x)$ και άρα το όριο $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ δεν υπάρχει. Συνεπώς, η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ούτε στο $x = 2$.



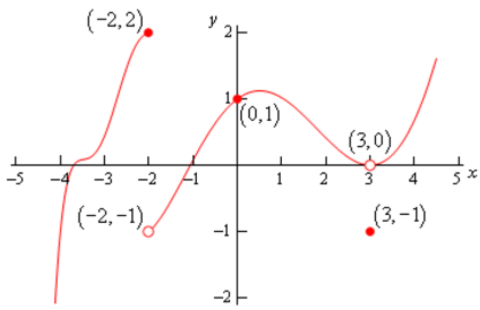
(iv) Έστω η συνάρτηση f της οποίας το γράφημα δίνεται διπλανό σχήμα. Έχουμε

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = 2 \neq -1 = \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

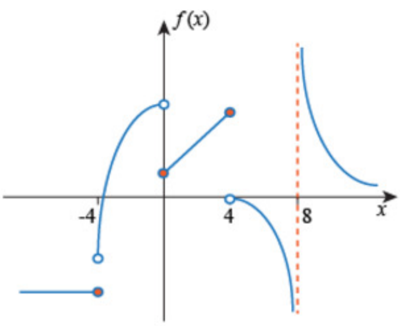
και άρα το όριο $\lim_{x\to -2} f(x)$ δεν υπάρχει και άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x = -2$. Τώρα,

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

και άρα το όριο $\lim_{x\to 3} f(x)$ υπάρχει αλλά δεν ισούται με $f(3) = -1$ και άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x = 3$.



(v) Έστω η συνάρτηση f της οποίας το γράφημα δίνεται στο διπλανό σχήμα.
Έχουμε $\lim_{x\to -4^+} f(x) \neq \lim_{x\to -4^-} f(x) = f(-4)$ και άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x = -4$. Ομοίως, η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ουτε στα σημεία $x = 0, 4$. Τέλος, $\lim_{x\to 8^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to 8^+} f(x) = +\infty$ και άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x = 8$.



Συνέχεια Σημαντικών συναρτήσεων

(i) [**Συνέχεια των πολυωνυμικών συναρτήσεων**]
Έστω

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

ένα πολυώνυμο με $a_n \neq 0$, δηλ. ένα πολυώνυμο βαθμού n. Είδαμε οτι

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Αυτό όμως είναι η συνθήκη (3) και άρα το P είναι συνεχής συνάρτηση στο x_0. Επειδή το x_0 ήταν τυχόν, έπεται οτι η P είναι συνεχής παντού.

(ii) [**Συνέχεια της συνάρτησης απόλυτη τιμή**]
Έστω

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Πράγματι, για $x > 0$ και $x < 0$, αυτή είναι συνεχής ως πολυώνυμο. Ελέγχουμε τη συνέχεια στο $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} (-x) = -\lim_{x \to 0^-} x = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} (-x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \end{aligned}$$

και άρα $\exists \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Συνεπώς, η f είναι συνεχής και στο $x = 0$. Άρα, η f είναι συνεχής παντού.

(iii) [**Συνέχεια της $n-$οστής Ρίζας**]
Έστω η $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \in [0, \infty)$. Ξέρουμε οτι αν ο n είναι άρτιος, τότε για $x_0 > 0$ είναι $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \to x_0} x} = \sqrt{x_0}$ ενώ αν ο n είναι περιττός, για $x_0 \geq 0$, είναι

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \to x_0} x} = \sqrt{x_0}$$

και άρα σε κάθε περίπτωση η f είναι συνεχής.

Συνέχεια της σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα 0.2.1. *Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Έστωσαν f και g δύο συναρτήσεις τέτοιες ώστε το $\lim_{x \to x_0} g(x)$ υπάρχει και η f είναι συνεχής στο $\lim_{x \to x_0} g(x)$. Τότε,*

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)).$$

Αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν και για $\lim_{x \to x_0^-}$, $\lim_{x \to x_0^+}$, $\lim_{x \to x_0}$, $\lim_{x \to +\infty}$, $\lim_{x \to -\infty}$ στη θέση του $\lim_{x \to x_0}$.

Πόρισμα 0.2.1. *Έστω g μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και έστω f μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο $g(x_0)$. Τότε και η $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Η g είναι συνεχής στο x_0, άρα,

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \tag{3}$$

και η f είναι συνεχής στο $g(x_0)$, άρα,

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)) \stackrel{(3)}{=} f(g(x_0)). \tag{4}$$

Έτσι,

$$\lim_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)) = f(g(x_0)) = (f\circ g)(x_0).$$

□

Παραδείγματα 0.2.2.

(i) Η συνάρτηση $f(x) = |x+3|$ είναι συνεχής. Πράγματι, η f είναι η σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f(x) = |x|$ και $g(y) = y+3$.

(ii) Θα δείξουμε οτι η συνάρτηση $h(x) = \sqrt{x^2+9}$ είναι συνεχής παντού και θα υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to 4} h(x)$.

Η $h = f\circ g$, όπου $g(x) = x^2+9$ και $f(y) = \sqrt{y}$ οι οποίες είναι συνεχείς συναρτήσεις. Τότε,

$$\lim_{x\to 4} h(x) = (f\circ g)(4) = f(g(4)) = \sqrt{4^2+9} = \sqrt{25} = 5.$$

Αυτό μπορεί να συμπτυχθεί στο ακόλουθο:

$$\lim_{x\to 4} \sqrt{x^2+9} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(x^2+9)} = \sqrt{25} = 5.$$

(iii) Να προσδιοριστούν οι σταθερές a και b έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \le -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x - b, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

να είναι συνεχής.

Απάντηση

Η συνέχεια στο σύνολο $\mathbb{R}\setminus\{\pm\frac{\pi}{2}\}$ είναι άμεση, αφού οι συναρτήσεις που εμφανίζονται είναι συνεχείς. Για να είναι συνεχής στο $x = -\frac{\pi}{2}$, πρέπει

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

δηλ. $b - a = 2$. Για να είναι συνεχής στο $x = \frac{\pi}{2}$, πρέπει

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

δηλ. $a + b = 0$. Λύνοντας το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων, βρίσκουμε οτι $a = -1$ και $b = 1$.

(iv) Να εξετάσετε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2+x, & x \le 1 \\ 2-x, & x > -1 \end{cases}$$

ως προς τη συνέχεια.

Απάντηση
Για $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ η f είναι συνεχής (ως πολυώνυμο). Ελέγχουμε τη συνέχεια στο $x = 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+}(2-x) = 1\\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}(x+2) = 3\end{aligned}$$

Έτσι, $\nexists \lim_{x\to 1} f(x)$ και άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x = 1$.

(v) Έστω g, h δύο συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $a \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $g(a) = h(a)$. Ορίζουμε

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & x \in (-\infty, a] \\ g(x), & x \in [a, \infty) \end{cases}.$$

Δείξτε οτι η f είναι συνεχής στο a.

Απάντηση
Θα δείξουμε οτι το $\lim_{h\to 0} f(a+h)$ υπάρχει και ισούται με $f(a)$. Έχουμε

$$\lim_{h\to 0-} f(a+h) = \lim_{h\to 0-} h(a+h) = h(a)$$

και

$$\lim_{h\to 0+} f(a+h) = \lim_{h\to 0+} g(a+h) = g(a).$$

Αλλά $g(a) = h(a) = f(a)$ και το ζητούμενο έπεται.

(vi) Έστω f μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y$ με f συνεχή στο $x = 0$. Δείξτε οτι η f είναι παντού συνεχής.

Απάντηση
Έχουμε $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+0) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0. \tag{5}$$

Τώρα, $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h\to 0}[f(a) + f(h) - f(a)] = \lim_{h\to 0} f(h)\\ &\overset{f \text{ συνεχής στο } 0}{=} f(0) \overset{(5)}{=} 0.\end{aligned}$$

Επομένως, $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, δηλ. f συνεχής στο (τυχόν) a.

Όταν ζητείται να εξετάσουμε αν η μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ενα σημείο $x_0 \in D(f)$, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

(i) **Βήμα 1ο**. Ελεγχουμε την ύπαρξη του $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Αν τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$. είναι διαφορετικά, τότε η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο x_0.
Αν όμως τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα, προχωράμε στο επόμενο βήμα.

(ii) **Βήμα 2ο**. Υπολογίζουμε την τιμή $f(x_0)$.

(iii) **Βήμα 3ο**. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 ενω στην αντίθετη περίπτωση είναι δεν είναι συνεχής (στο x_0).

Ας δούμε μερικά ακόμη παραδείγματα.

Παραδείγματα 0.2.3.

(i) Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{2 - x}, & x \neq 2 \\ -5, & x = 2 \end{cases}$$

Είναι καλά ορισμένη αφού $2 - x = 0 \Leftrightarrow$ και $f(2) = -5/2$. Είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (ως πηλίκο συνεχών). Ελέγχουμε τη συνέχεια και στο σημείο $x = 2$: Είναι

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{2 - x} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3x-1)}{2 - x} = -\lim_{x\to 2}(3x - 1) = -5 = f(2)$$

και αρα η f είναι συνεχής (και) στο σημείο $x = 2$. Τελικά, η f είναι παντού συνεχής.

(ii) Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x - 1}, & x < 1 \\ 2x + 1, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Είναι καλά ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 1)$ (ως πηλίκο συνεχών) και συνεχής στο διάστημα $(1, +\infty)$ (ως πολυωνυμική). Ελέγχουμε τη συνέχεια και στο σημείο $x = 1$: Είναι

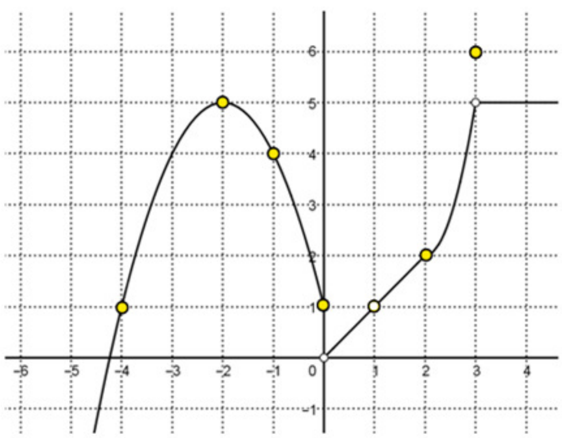
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x^2 - 3x + 2)}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x-2)(x-1)}{x - 1} \lim_{x\to 1^-} x(x-2) = -1 \end{aligned}$$

και

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x + 1) = 3.$$

Έτσι, αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x = 1$.

(iii) Στο σχήμα 3 δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Είναι



Σχήμα 3: Παράδειγμα 0.2.3/**(iii)**

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 5$$

αλλά $f(3)=6$ και αρα η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x=3$. Επίσης,

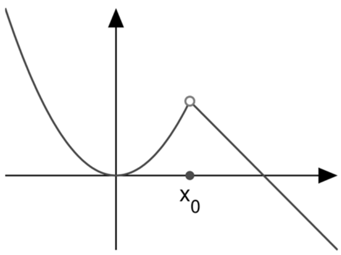
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=1 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$

και αρα το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει. Έτσι, η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x=0$.
(Στο σημείο $x=1$ η συνάρτηση δεν ορίζεται).
Έτσι, η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε ενα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,3)$ και $(3,+\infty)$.

Σημείωση: Μπορούμε να πούμε π.χ. ότι ο **περιορισμός** της συνάρτησης στο διάστημα $(-\infty,0)$ είναι συνεχής συνάρτηση κ.ο.κ..

Είδη ασυνεχειών και διόρθωση συνέχειας

Λέμε ότι μια πραγματική συνάρτηση f έχει **αιρώμενη ασυνέχεια** σε ενα σημείο x_0 του π.ο. της αν το σημείο αυτό είναι μεμονωμένο, δηλ. υπάρχει μια (ανοικτή) περιοχή του σημείου αυτού η οποία δεν περιέχει άλλα σημεία του π.ο. της συνάρτησης.
Ισοδύναμα, η συνάρτηση f έχει αιρώμενη ασυνέχεια σε ένα σημείο x_0 του Π.Ο. της αν το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει αλλά δεν είναι ίσο με το $f(x_0)$. Η ονομασία 'αιρώμενη ασυνέχεια' δικαιολογείται από το ότι



Σχήμα 4: Αιρώμενη ασυνέχεια

μπορούμε να 'διορθώσουμε' τη συνάρτηση ως συνεχή συνάρτηση παντού στο Π.Ο. της.
Για **παράδειγμα**, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{\sin(2x)}{x}.$$

Είναι $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Η f είναι συνεχής (στο π.ο. της) ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.
Τώρα,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}=2\cdot 1=2.$$

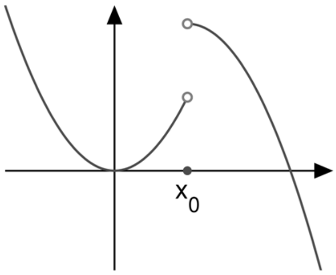
Συνεπώς, η

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\frac{\sin(2x)}{x}, & x\neq 0\\ \\ 2, & x=0\end{cases}$$

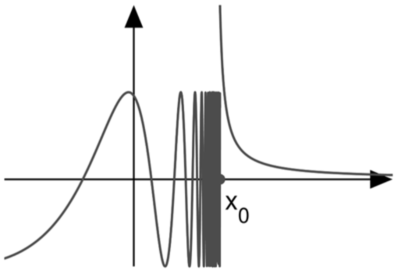
είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση αυτή είναι η συνεχής επέκταση της f.

Λέμε ότι μια πραγματική συνάρτηση f παρουσιάζει **άλμα ασυνέχειας** σε ενα σημείο x_0 του π.ο. της αν τα (πλευρικά) όρια $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσα μεταξύ τους.

Λέμε ότι μια πραγματική συνάρτηση f έχει **ουσιώδη ασυνέχεια** σε ένα σημείο x_0 του π.ο. της αν τουλάχιστον ένα από τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ δεν υπάρχει.



Σχήμα 5: Άλμα ασυνέχειας



Σχήμα 6: Ουσιώδης ασυνέχεια

►► Παράδειγμα
Αφού δείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}$$

είναι συνεχής παντού στο π.ο. της. Ακολούθως, επεκτείνετε την f σε μια συνάρτηση συνεχή σε όλο το $\mathbb{R}$.

Απάντηση
Η f είναι ρητή συνάρτηση. Τότε

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3 - 4x^2 + 4x - 3 \neq 0\}.$$

Θα πρέπει να βρούμε τις ρίζες του (κυβικού) πολυωνύμου

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 3.$$

Είναι

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = x^3 - 3x^2 - x^2 + 4x - 3 = x^2(x-3) - (x^2 - 4x + 3) \\ &= x^2(x-3) - (x-3)(x-1) = (x-3)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

(το τριώνυμο $x^2 - x + 1$ έχει αρνητική διακρίνουσα, αρα δεν παραγοντοποιείται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών). Άρα,

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Έτσι, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ και η συνάρτηση είναι συνεχής (ως ρητή) στο π.ο. της.
Θα την επεκτείνουμε σε συνεχή συνάρτηση σε ολο το $\mathbb{R}$.
Κατ΄ αρχας, βρίσκουμε (όπως πρίν) ότι

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x^2 + x + 1)$$

και αρα, για $x \neq 3$,

$$f(x) = \frac{(x-3)(x^2+x+1)}{(x-3)(x^2-x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$$

Έτσι,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{3^2+3+1}{3^2-3+1} = \frac{13}{7}.$$

Συνεπώς, η

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2-2x-3}{x^3-4x^2+4x-3}, & x \neq 3 \\ \\ \dfrac{13}{7}, & x = 3 \end{cases}$$

είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση αυτή είναι η συνεχής επέκταση της f.

Σημείωση: Για ενα δεύτερο τρόπο εύρεσης των ριζών των πιο πολυωνύμων, δες το Θεώρημα ρητών ριζών στο παράρτημα στο τέλος του κεφαλαίου.

Ειδικά Θεωρήματα

Θεώρημα 0.2.2. *(Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής)*

Μια **συνεχής** συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ λαμβάνει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο (στο $[\alpha, \beta]$). Δηλαδή, υπάρχουν $x_0, x_1 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιοι ώστε

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Παρατηρήσεις 0.2.1.

(i) Το πιο πάνω Θεώρημα μας λέει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε ενα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι επίσης κλειστό και φραγμένο διάστημα, δηλ. $f([\alpha, \beta]) = [m, M]$, όπου

$$m = \min_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \qquad \text{και} \qquad M = \max_{x\in[\alpha,\beta]} f(x).$$

Οι πιο πάνω αριθμοί m και M λαμβάνονται για κάποια x_0 και x_1 αντίστοιχα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(ii) Το αντίστροφο του πιο πάνω δεν ισχύει, δηλ. αν f συνεχής συνάρτηση με σύνολο τιμών κλειστό και φραγμένο διάστημα I, τότε δεν έπεται ότι $f^{-1}(I)$ κλειστό και φραγμένο. Για παράδειγμα, για τη συνεχή συνάρτηση $f(x) = \sin x$, έχουμε ότι $D(f) = \mathbb{R}$ αλλά $R(f) = [-1, 1]$.

(iii) Μπορεί βέβαια να είναι $m = M$. Στην περίπτωση αυτή, το Σ.Τ. της συνάρτησης είναι μονοσύνολο και άρα η συνάρτηση είναι σταθερή.

(iv) Ενδέχεται η μέγιστη και ελάχιστη τιμή να λαμβάνονται έκαστη σε περισσότερα από ένα σημεία του διαστήματος $[\alpha, \beta]$. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-\pi/2, 5\pi/2]$. Η μέγιστη τιμή της f είναι η $1 = f(\pi/2) = f(5\pi/2)$ και η ελάχιστη η $-1 = f(-\pi/2) = f(3\pi/2)$.

▶▶ **Εφαρμογή**
Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ενα ανοικτό διάστημα δεν έχει πάντοτε σύνολο τιμών που να είναι ανοικτό διάστημα.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in (0, 5\pi/3)$. Τότε

$$f((0, 5\pi/3)) = [-1, 1] = [f(3\pi/2), f(\pi/2)].$$

▶ Όλες οι συνθήκες στο πιο πάνω Θεώρημα είναι αναγκαίες.
▶▶ **Υπόθεση της συνέχειας:** Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f : [-2, 7] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4-x}, & -2 \leq x < 4 \\ 0, & x = 4 \\ \dfrac{1}{4-x} + 3, & 4 < x \leq 7 \end{cases}.$$

Η f δεν είναι συνεχής στο $D(f) = [-2, 7]$ και δε λαμβάνει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο.

▶▶ **Υπόθεση του κλειστού διαστήματος:** Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f : (-3, 3) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 2 - \frac{1}{10}x^3.$$

Η f είναι συνεχής στο $D(f) = (-3, 3)$, το πεδίο ορισμού της δεν είναι κλειστό διάστημα και δε λαμβάνει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο.

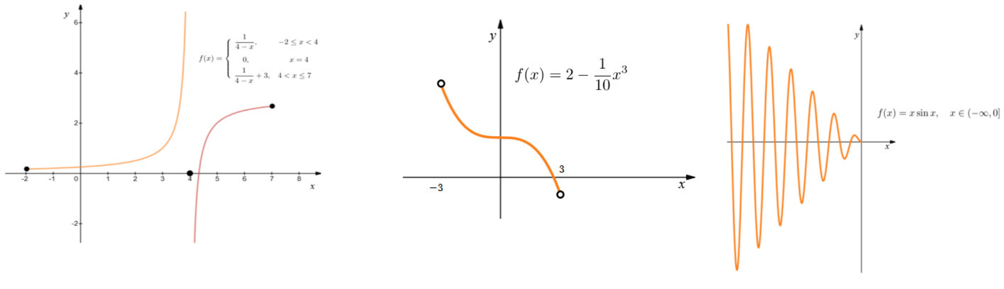
▶▶ **Υπόθεση του φραγμένου διαστήματος:** Η συνάρτηση

$$f(x) = x \sin x, \quad x \in (-\infty, 0]$$

ή η

$$g(x) = x \sin x, \quad x \in [0, +\infty)$$

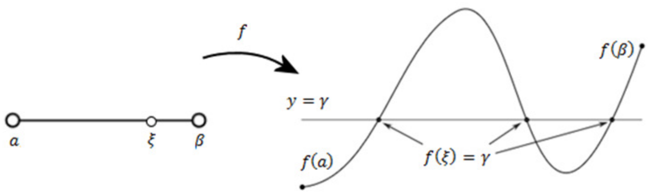
είναι συνεχείς χωρίς ολικό μέγιστο ή ελάχιστο.



Σχήμα 7: Η αναγκαιότητα των υποθέσεων του Θεωρήματος Μέγιστης/Ελάχιστης τιμής

Θεώρημα 0.2.3. *(Ενδιάμεσης Τιμής)*

Έστω $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν a ένας αριθμός μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, τότε υπάρχει $c \in [a, b]$ τέτοιος ώστε $f(c) = a$.

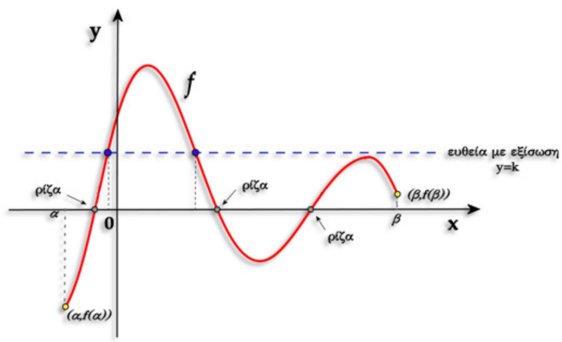


Σχήμα 8: Θεώρημα 0.2.3

Το πιο πάνω Θεώρημα (με τις υποθέσεις του) μας λέει ότι μια συνεχής συνάρτηση μπορεί να πάρει τιμές όλες τις τιμές της μεταξύ των αριθμών $f(a)$ και $f(b)$. Διαισθητικά, (υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $f(b) > f(a)$) για να πάμε από το σημείο $(a, f(a))$ στο σημείο $(b, f(b))$ του γραφήματός της, τότε αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής, αναγκαστικά θα περάσουμε και από οποιοδήποτε σημείο $(k, f(k))$ μεταξύ των δυο αυτών σημείων.

Παρατηρήσεις 0.2.2.

(i) Το Θεώρημα μας λέει ότι οποιοδήποτε αριθμό k πάρουμε στο διάστημα $[f(a), f(b)]$ αν $f(b) > f(a)$ (ή στο διάστημα $[f(b), f(a)]$ αν $f(a) > f(b)$) τότε η εξίσωση $f(\xi) = k$ έχει λύση (στο διάστημα $[a, b]$). Η τελευταία εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως $f(\xi) - k = 0$. Αν λοιπόν οι αριθμοί $f(a)$ και $f(b)$ είναι ετερόσημοι, τότε το πιο πάνω Θεώρημα μας εγγυάται την ύπαρξη λύσης της εξίσωσης $f(\xi) = 0$, δηλ. ότι το γράφημα της f αναγκαστικά τέμνει τον άξονα των τετμημένων (βλ. σχήμα 9).



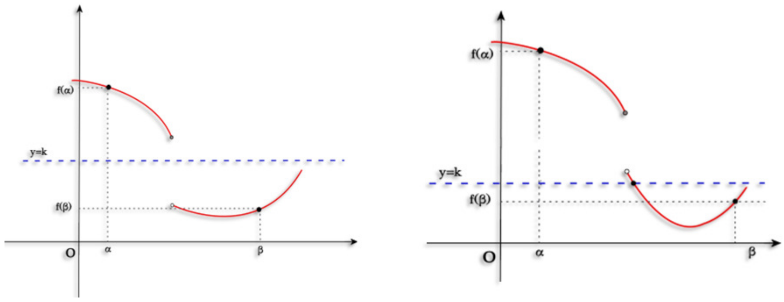
Σχήμα 9

(ii) Ο αριθμός ξ στο πιο πάνω Θεώρημα δεν είναι κατανάγκην μοναδικός. Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος, μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ενα ξ που να ικανοποιούν το αποτέλεσμά του.

(iii) Ανήκει στην κατηγορία των υπαρξιακών Θεωρημάτων, γιατί ενώ μας εγγυάται την ύπαρξη ενος (τουλάχιστον) αριθμού ξ, δε μας λέει πώς μπορούμε να τον προσδιορίσουμε.

(iv) Για να μη θεωρούμε κάθε φορά περιπτώσεις είτε $f(b) > f(a)$ είτε $f(a) > f(b)$, αρκεί να λέμε ότι υπάρχει αριθμός στο διάστημα $[m, M]$ όπου m είναι η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή των $f(a)$ και $f(b)$ αντίστοιχα. Με άλλα λόγια, το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής (συντομογραφικά ΘΕΤ) λέει ότι το σύνολο $f([a, b])$ είναι επίσης διάστημα και το οποίο περιέχει το σύνολο $[m, M]$ όπου m είναι η ελάχιστη και M όπως πρίν.

(v) Χωρίς την υπόθεση της συνέχειας, το αποτέλεσμα του πιο πάνω Θεωρήματος δεν ισχύει (βλ. σχήμα 10).



Σχήμα 10

▶▶ Άσκηση

(i) Για το πολυώνυμο $p(x) = x^3 - x + 3$, βρείτε έναν ακέραιο αριθμό n τέτοιον ώστε $p(x) = 0$ για $x \in [n, n+1]$.

(ii) Δείξτε οτι υπάρχει κάποιος αριθμός x τέτοιος ώστε

$$x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \sin^2 x} = 119.$$

Λύση

(i) Έχουμε $f(-2) < 0 < f(-1)$, άρα $n = -2$, από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.

(ii) Θεωρούμε την $g(x) := f(x) - 119$. Η g είναι συνεχής παντού και $g(1) > 0$ ενώ $g(-2) < 0$. Συνεπώς, από το Θέωρημα Ενδιάμεσης Τιμής, υπάρχει $x \in (-2, 1)$ τέτοιος ώστε $g(x) = 0$.

▶▶ Άσκηση
Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f([0,1]) \subseteq [0,1]$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = x_0$.
Δώστε γεωμετρική ερμηνεία στο πιο πάνω αποτέλεσμα.

Λύση[1]
Αν $f(0) = 0$ ή $f(1) = 1$, τότε μπορούμε να πάρουμε για x_0 το 0 ή το 1.
Αν $f(0) > 0 = \mathrm{id}(0)$, τότε $(f - \mathrm{id})(0) > 0$ και αν $f(1) < 1 = \mathrm{id}(1)$, τότε $(f - \mathrm{id})(1) < 0$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής στη συνάρτηση $g := f - \mathrm{id}$ στο διάστημα $[0,1]$: υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιος ώστε $g(x_0) = 0$, δηλ. $f(x_0) - \mathrm{id}(x_0) = 0$, δηλ. $(x_0) = x_0$.

Γεωμετρικά, το πιο πάνω μας λέει ότι μια συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$ θα τέμνει τη διαγώνιο $y = x$, δηλ. το γράφημα της ταυτοτικής συνάρτησης.
Με το ίδιο επιχείρημα (θεωρώντας τη συνάρτηση $g = f + \mathrm{id}$) μπορούμε να δείξουμε ότι η f τέμνει και την άλλη διαγώνιο, δηλ. την $y = -x$.

[1] Με id συμβολίζουμε την ταυτοτική συνάρτηση, δηλ. $\mathrm{id}(x) = x$.

▶▶ **Άσκηση**
Δείξτε το ακόλουθο γενικότερο αποτέλεσμα του προηγούμενου:

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f([0,1]) \subseteq [0,1]$ και έστω $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $g(0) = 0, \quad g(1) = 1$ ή με $g(0) = 1, \quad g(1) = 0$. Τότε υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

Λύση
Αν $f(0) = 0$ τότε μπορούμε να πάρουμε για x_0 το 0 ή το 1, σε κάθε μια από τις υποθέσεις για την g. Ομοίως αν $f(1) = 1$.
Έστω $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $g(0) = 0, \quad g(1) = 1$. Αν $f(0) > 0 = g(0)$, τότε $(f-g)(0) > 0$ και αν $f(1) < 1 = g(1)$, τότε $(f-g)(1) < 0$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής στη συνάρτηση $G := f - g$ στο διάστημα $[0,1]$: υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιος ώστε $G(x_0) = 0$, δηλ. $f(x_0) - g(x_0) = 0$, δηλ. $f(x_0) = g(x_0)$.

Παρατήρηση 0.2.2. *Το αντίστροφο του ΘΕΤ δεν ισχύει. Υπάρχει παράδειγμα συνάρτησης η οποία ικανοποιεί το αποτέλεσμα του ΘΕΤ αλλά να μην είναι συνεχής.*[2].

Πόρισμα 0.2.2. *(Θεώρημα Bolzano) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό και φραγμένο) διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε, αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.*

Απόδειξη.
Η υπόθεση $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ μας λέει ότι $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Υποθέτουμε ότι $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$. Τότε, το αποτέλεσμα έπεται αμέσως από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής (για $\xi = 0$). Υποθέτουμε τώρα ότι $f(\beta) < 0 < f(\alpha)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = -f(x)$, $\forall x \in [a, \beta]$, δηλ. τη συνάρτηση $-f$. Τότε, $g(\alpha) = -f(\alpha)$ και $g(\beta) = -f(\beta)$ και αρα, αφού $f(\beta) < 0 < f(\alpha)$, έπεται ότι $g(\alpha) < 0 < g(\beta)$. Από την προηγούμενη περίπτωση, θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$. Αλλά, $g(\xi) = -f(\xi)$ και το συμπέρασμα έπεται. □

▶ **Παράδειγμα**
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - x^2 + 3x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον δυο λύσεις στο διάστημα $(-2, 0)$.

Λύση
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - x^2 + 3x + 1$. Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Είναι $f(-2) = 7 > 0$ και $f(-1) = -2 < 0$ και αρα $f(-2) \cdot f(-1) < 0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[-2, -1]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi_0 \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_0) = 0$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi_0 \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε $\xi_0^4 - \xi_0^2 + 3\xi_0 + 1 = 0$. Επίσης, $f(-1) = -2 < 0$ και $f(0) = 1 > 0$ και αρα $f(-1) \cdot f(0) < 0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[-1, 0]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1) = 0$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $\xi_1^4 - \xi_1^2 + 3\xi_1 + 1 = 0$. Έτσι, η εξίσωση $x^4 - x^2 + 3x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον 2 λύσεις στο διάστημα $(-2, 0)$.

[2]Συγκεκριμένα, υπάρχει συνάρτηση (Conway base 13 function) για την οποία αν $f(\alpha) < f(\beta)$ και επιλέξουμε οποιοδήποτε αριθμό γ μεταξύ των τιμών $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ τότε, μπορούμε να βρούμε ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \gamma$, αλλά η συνάρτηση αυτή να μην είναι συνεχής.

▶▶ Άσκηση

Έστω $f : [0,1] \to [-5,-3]$ συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = (x-1)f(x) - 2$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $g(0) \cdot g(1) < 0$.

(ii) Υπάρχει τουλάχιστον ενα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

(iii) Η εξίσωση $f(x) = 2/(x-1)$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

(i) Είναι $g(0) = (0-1) \cdot f(0) - 2 = -f(0) - 2$ και $g(1) = (1-1) \cdot f(1) - 2 = -2$. Έτσι, $g(0) \cdot g(1) = 2(f(0) + 2)$. Αλλά $R(f) = [-5,-3]$ και αρα

$$-5 \leq f(0) \leq -3 \Rightarrow -3 \leq f(0) + 2 \leq -1 \Rightarrow g(0) \cdot g(1) \leq -2 < 0.$$

(ii) Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και η g θα είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως σύνθεση συνεχών. Τώρα, από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι ικανοποιείται το Θεώρημα του Bolzano για την f στο διάστημα $[0,1] \Rightarrow$ υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

(iii) $x \in (0,1) \Rightarrow (x-1)x - 1 \neq 0$. Τότε,

$$f(x) = \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)f(x) - 2 = 0$$

και το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από το προηγούμενο ερώτημα.

Παράρτημα

Το πιο κάτω Θεώρημα μας βοηθά στην παραγοντοποίηση πολυωνύμων, έστω στην ειδική περίπτωση που αυτά έχουν ακέραιους συντελεστές:

Θεώρημα 0.2.4. *(Θεώρημα Ρητών ριζών) Έστω το πολυώνυμο*

$$P(x) = x_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

όπου $c_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ και $c_0, c_n \neq 0$. Τότε, για κάθε ρητή ρίζα $x = \pm p/q$ με μκδ(p, q)=1 της εξίσωσης $P(x) = 0$, έχουμε ότι $p|c_0$ και $q|c_n$.

▶**Παράδειγμα 0.2.1.**

Θα παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 19x^2 - 9x + 9$$

Είναι $\deg(P) = 4$ και $c_0 = 9,\ c_4 = 2$. Οι διαιρέτες του σταθερού όρου c_0 είναι οι $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ και του ηγετικού όρου c_4 οι $\pm 1, \pm 2$. Ελέγχουμε τους πιθανούς συνδυασμούς:

$$\pm \frac{1, 3, 9}{1, 2},$$

δηλ. οι $\pm, \pm 1/2, \pm 3, \pm 3/2, \pm 9, \pm 9/2$. Ελέγχουμε μια μια αν είναι λύσεις της εξίσωσης $P(x) = 0$. Παρατηρούμε ότι $P(-1) = 0$ και αρα ο $x = -1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου. Εκτελούμε τη διαίρεση $P(x)/(x + 1)$ και βρίσκουμε

$$P(x) = (x + 1)(x^3 - 19x + 10).$$

Ακολούθως, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στο $R(x) = x^3 - 19x + 10$.
Διαφορετικά, συνεχίζουμε τον πιο πάνω έλεγχο και βρίσκουμε ότι $P(1/2) = P(3) = P(-3) = 0$.
Έτσι,

$$P(x) = 2(x + 1)(x - 1/2)(x - 3)(x + 3) = (x + 1)(2x - 1)(x - 3)(x + 3)$$