

Περιεχόμενα

| | |
|---|-----------|
| ΠΡΟΛΟΓΟΣ | 1 |
| 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ | 3 |
| 1.1 Πραγματικοί αριθμοί (Εισαγωγή) | 3 |
| 1.2 Διαστήματα - Ανισώσεις | 5 |
| 1.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού | 11 |
| 1.4 Γραφικές Παραστάσεις | 14 |
| 1.5 Συντελεστής διεύθυνσης (κλίση) ευθείας | 17 |
| 1.6 Εξίσωση ευθείας | 19 |
| 1.7 Ο κύκλος | 21 |
| 1.8 Η παραβολή | 22 |
| Επιπρόσθετα παραδείγματα | 23 |
| Ασκήσεις | 25 |
| 2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ | 29 |
| 2.1 Εισαγωγή | 29 |
| 2.2 Είδη συναρτήσεων | 32 |
| 2.3 Πράξεις με συναρτήσεις | 35 |
| 2.4 Γραφική παράσταση συνάρτησης | 37 |
| 2.5 Αντίστροφη συνάρτηση | 41 |
| 2.6 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις | 43 |
| 2.7 Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση | 46 |
| Επιπρόσθετα παραδείγματα | 49 |
| Ασκήσεις | 52 |
| 3 ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ | 55 |
| 3.1 Όριο συνάρτησης | 55 |
| 3.2 Συνέχεια συνάρτησης | 60 |
| 3.3 Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής | 64 |
| 3.4 Όρια και συνέχεια τριγωνομετρικών, εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων | 65 |
| 3.5 Όρια συναρτήσεων σε πιο αυστηρή μαθηματική γλώσσα | 68 |
| Επιπρόσθετα παραδείγματα | 69 |
| Ασκήσεις | 71 |
| 4 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ | 75 |
| 4.1 Εισαγωγή | 75 |
| 4.2 Παράγωγος συνάρτησης | 77 |
| 4.3 Κανόνες παραγωγίσις | 81 |
| 4.4 Παράγωγος μη-αλγεβρικών συναρτήσεων | 83 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.5 | Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης. Κανόνας αλυσίδας | 84 |
| 4.6 | Παράγωγος πλεγμένης συνάρτησης | 85 |
| 4.7 | Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης | 87 |
| 4.8 | Παραμετρικές εξισώσεις | 89 |
| | Επιπρόσθετα παραδείγματα | 91 |
| | Ασκήσεις | 94 |
| 5 | ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ | 97 |
| 5.1 | Σχετικός ρυθμός μεταβολής | 97 |
| 5.2 | Μονοτονία συνάρτησης | 99 |
| 5.3 | Ακρότατα συνάρτησης | 102 |
| 5.4 | Γραφική παράσταση συνάρτησης | 107 |
| 5.5 | Η μέθοδος του Newton | 115 |
| 5.6 | Θεώρημα Rolle - Θεώρημα μέσης τιμής | 117 |
| | Επιπρόσθετα παραδείγματα | 119 |
| | Ασκήσεις | 121 |
| 6 | ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ | 125 |
| 6.1 | Εισαγωγή | 125 |
| 6.2 | Παράγουσα ή αόριστο ολοκλήρωμα | 125 |
| 6.3 | Ορισμένο ολοκλήρωμα (Ολοκλήρωμα Riemann) | 129 |
| 6.4 | Το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού | 132 |
| 6.5 | Το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα | 136 |
| 6.6 | Το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού | 137 |
| | Επιπρόσθετα παραδείγματα | 138 |
| | Ασκήσεις | 141 |
| 7 | ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ | 145 |
| 7.1 | Εισαγωγή | 145 |
| 7.2 | Υπερβολικές ταυτότητες | 147 |
| 7.3 | Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις | 148 |
| 7.4 | Παράγωγοι τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων | 150 |
| 7.5 | Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων | 152 |
| | Επιπρόσθετα παραδείγματα | 153 |
| | Ασκήσεις | 156 |
| 8 | ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ | 159 |
| 8.1 | Εισαγωγή | 159 |
| 8.2 | Ολοκλήρωση κατά παράγοντες | 159 |
| 8.3 | Ολοκλήρωση με αντικατάσταση | 163 |
| 8.4 | Ολοκλήρωση με ανάλυση σε μερικά κλάσματα | 168 |
| 8.5 | Άρρητα ολοκληρώματα | 172 |
| | Επιπρόσθετα παραδείγματα | 173 |
| | Ασκήσεις | 177 |

| | |
|---|------------|
| 9 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ | 181 |
| 9.1 Εμβαδόν οριζόμενο από συνάρτηση | 181 |
| 9.2 Εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από δύο συναρτήσεις | 183 |
| 9.3 Όγκος στερεών εκ περιστροφής | 185 |
| 9.4 Όγκος από κυλινδρικά κελύφη | 189 |
| 9.5 Μήκος τόξου | 191 |
| 9.6 Εμβαδόν επιφάνειας εκ περιστροφής | 193 |
| 9.7 Ευθύγραμμη κίνηση | 194 |
| Επιπρόσθετα παραδείγματα | 198 |
| Ασκήσεις | 200 |
| 10 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ - ΚΑΝΟΝΑΣ L' HOPITAL | 203 |
| 10.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα | 203 |
| 10.2 Κανόνες L' Hopital | 207 |
| Επιπρόσθετα παραδείγματα | 211 |
| Ασκήσεις | 213 |
| 11 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ | 217 |
| 11.1 Εισαγωγή | 217 |
| 11.2 Μονότονες ακολουθίες | 222 |
| Επιπρόσθετα παραδείγματα | 223 |
| Ασκήσεις | 227 |
| 12 ΑΠΕΙΡΕΣ ΣΕΙΡΕΣ | 229 |
| 12.1 Εισαγωγή | 229 |
| 12.2 Κριτήρια σύγκλισης | 232 |
| 12.3 Εναλλάσσοις σειρά - Σχετική σύγκλιση | 240 |
| 12.4 Κριτήρια Σύγκλισης-Επανάληψη | 243 |
| Επιπρόσθετα παραδείγματα | 244 |
| Ασκήσεις | 246 |
| 13 ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ | 251 |
| 13.1 Εισαγωγή | 251 |
| 13.2 Σειρές Taylor και Maclaurin | 253 |
| 13.3 Ανάπτυγμα Taylor με υπόλοιπο | 256 |
| 13.4 Υπολογισμός σειράς Maclaurin με αντικατάσταση | 258 |
| 13.5 Παραγωγή και ολοκλήρωση δυναμοσειρών | 260 |
| Επιπρόσθετα παραδείγματα | 263 |
| Ασκήσεις | 266 |
| 14 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ | 269 |
| 14.1 Εισαγωγή | 269 |
| 14.2 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης | 272 |
| 14.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης | 279 |
| 14.4 Ειδικές μορφές διαφορικών εξισώσεων | 287 |
| Επιπρόσθετα παραδείγματα | 289 |
| Ασκήσεις | 292 |

| | |
|---|------------|
| 15 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ | 297 |
| 15.1 Εισαγωγή | 297 |
| 15.2 Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς | 300 |
| 15.3 Εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού | 304 |
| 15.4 Ρίζες μιγαδικών αριθμών | 307 |
| 15.5 Εφαρμογές των μιγαδικών αριθμών | 309 |
| Επιπρόσθετα παραδείγματα | 314 |
| Ασκήσεις | 315 |
| Επιπρόσθετες Ασκήσεις | 317 |
| Παράρτημα Α - Εισαγωγή στη Τριγωνομετρία | 329 |
| Παράρτημα Β - Σύνολα | 337 |
| Απαντήσεις των Ασκήσεων | 341 |
| Βιβλιογραφία | 353 |

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα Μαθηματικά θεωρούνται ότι αποτελούν την κύρια οδό σε όλους σχεδόν τους τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας, καθώς και η σαφέστερη γλώσσα στην διεπιστημονική επικοινωνία. Γι' αυτό το λόγο η διδασκαλία των Μαθηματικών πρέπει να είναι απαραίτητη όχι μόνο στις Μαθηματικές επιστήμες αλλά και σε πολλές άλλες όπως για παράδειγμα, στις Φυσικές και Οικονομικές επιστήμες.

Αυτές οι σημειώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εισαγωγικό μάθημα στα Μαθηματικά σε φοιτητές στις Φυσικές και Οικονομικές επιστήμες, καθώς και στη Μηχανική. Οι μόνες γνώσεις που χρειάζονται είναι Μαθηματικά του Λυκείου, αν και σε αρκετά κεφάλαια υπάρχει επανάληψη των προ πανεπιστημιακών Μαθηματικών. Μόνο σε εξαιρετικές περιπτώσεις περιέχονται αποδείξεις και θεωρία σε πιο αυστηρή Μαθηματική γλώσσα. Επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν από φοιτητές των Μαθηματικών ως το πρώτο εισαγωγικό μάθημα σε μαθηματικές μεθόδους που θα χρειαστούν σε μαθήματα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Για τις αποδείξεις των θεωρημάτων και για θεωρητική προσέγγιση των όσων παρουσιάζονται σε αυτές τις σημειώσεις, πρέπει να χρησιμοποιήσουν άλλες πηγές.

Το περιεχόμενο των σημειώσεων προέρχονται από την περιοχή των Μαθηματικών η οποία καλείται **Απειροστικός Λογισμός** και σε ένα κεφάλαιο δίνεται μια σύντομη εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς. Απειροστικός Λογισμός είναι τα Μαθηματικά της κίνησης και της μεταβολής και είναι επίσης η κύρια οδός που οδηγεί σε όλους τους τομείς των ανώτερων Μαθηματικών. Αρχικά χρησιμοποιήθηκε τον 17ον αιώνα για να λυθούν συγκεκριμένα μαθηματικά προβλήματα, όπως για παράδειγμα, να βρεθεί η εφαπτομένη ευθεία γραμμή σε ένα σημείο μιας καμπύλης, το μήκος μιας καμπύλης, το εμβαδόν μιας περιοχής και ο όγκος ενός στερεού. Τέτοια προβλήματα είχαν λυθεί και γενικά είχε δημιουργηθεί ο απειροστικός λογισμός από τους Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) και Isaac Newton (1642-1727).

Οι σημειώσεις χωρίζονται σε 15 κεφάλαια. Σε κάθε κεφάλαιο, εκτός από τη συνοπτική θεωρία, περιέχει αρκετά παραδείγματα. Αυτά θα βοηθήσουν τον φοιτητή να κατανοήσει την θεωρία και να λύσει τις ασκήσεις που βρίσκονται στο τέλος κάθε κεφαλαίου.

Ο απειροστικός λογισμός χωρίζεται στον λογισμό των παραγώγων, τον **διαφορικό λογισμό** και στον λογισμό των ολοκληρωμάτων, τον **ολοκληρωτικό λογισμό**. Οι τεχνικές που δίνονται μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση φυσικών προβλημάτων. Για παράδειγμα, ο Απειροστικός Λογισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστούν οι τροχιές δορυφόρων της Γης.